### Exercice 4:

#### Q4.1

Cliques:

1. {a} … {j}
2. {a, b}, {a, c} …
3. {a, b, c}, {a, d, b} …
4. {e, h, i, j}

#### Q.4.2

Ensembles indépendants:

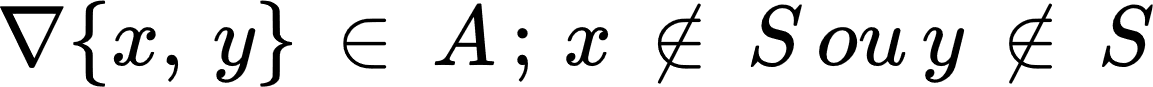
1. {a}, {b} …
2. {a, e}, {a, f} …
3. {d, f, i}, {b, h, g} …

#### Q.4.3

Ensembles couvrant toutes les arêtes:

V = ensemble de tous les sommets

1. V - {d, f, i} = {a, b, c, e, g, h, j}



#### Q.4.4

si S indépendant pour G = (V, A) alors S est une clique de Ḡ = (V, Ā)

Preuve:

si S independant ∇ {x, y} ∈ A, x ∉ S ou y ∉ S

donc si {x, y} ⊆ S, (x ≠ y), alors {x, y} ∉ A,

donc {x, y} ∈ Ā

donc S est une clique de Ḡ

#### Q.4.5 - Q.4.6

3SAT ⊰ ENS INDÉPENDANT

3SAT ୧ → v/f

↓ ↕

ENS IND G, k → v/f

a ៴ ㄱb ៴ c ⇒ (ㄱb) // Si on construit un graphe complet (toutes les arêtes possible), ／ ＼ // alors les ensembles indépendants sont des singletons.

(a1) — (c1)

| // On bloque les “interprétations” incohérentes.

ㄱa ៴ c ⇒ (ㄱa) — (c) // On de “satisfait” qu’un littéral de c2

Exemples d’ensembles indépendant max {ㄱb1, c2}

⇒ interprétation :

I(b) = F, I(c) = V

I ≠ c1, c2.

#### Q.4.7

Soit ୧ ensembles de clauses, ou toutes les clauses ont 3 littéraux

On construit G = (V, A):

pour chaque clause Ci = li1 ៴ li2 ៴ li3

* V contient un sommet pour chaque littéral, et on ajoute trois arêtes pour que ces 3 sommets forment une clause pve
* On ajoute les arêtes {lik, ljk} ou lik, ljk sont deux littéraux complémentaires / opposés.

On va démontrer que ୧ est satisfiable si G contient un ensemble indépendant de taille |୧|

Si S est un ensembles indépendant de G de taille |୧| :

on peut définir une interprétation I tel que I(li) = V pour tout li ∈ S;

* S contient |୧| sommets, et ne peut contenir 2 sommets correspondant à une même clause, donc S contient exactement un "littéral' de chaque clause.
* S ne peut contenir deux sommets “contradictoires”.

Donc I est bien une interprétation (partielle) et I ≠ ୧.

Réciproque:

Si I ≠ ୧ :

* On peut choisir, pour chaque clause, Ci un littéral li tel que I ≠ li
* S est l’ensembles des sommets correspondants:
* S contient un “sommet / littéraux" par clause
* S ne contient pas 2 sommets / littéraux opposés.

⇒ |S| = |୧| et S ne contient aucune arête donc S est indépendant.

#### Q.4.8

3SAT est NP-complet.la transfo. se calcule en temps linéaire

⇒ ensembles indépendant est NP-difficile.